

Un Modelo Cinemático para la Interpretación Tridimensional de Proyecciones Poliédricas.

Lluís Ros y Federico Thomas
Institut de Robòtica i Informàtica Industrial
Gran Capità 2-4
08034 Barcelona
e-mail: llros@iri.upc.es, fthomas@iri.upc.es

Resumen

En este trabajo reducimos el análisis de la realizabilidad espacial de un dibujo lineal al estudio de las propiedades cinemáticas de una estructura de paneles articulados.

Utilizando álgebra de Cayley, estudiamos el comportamiento cinemático instantáneo de este modelo y demostramos que un dibujo lineal es espacialmente realizable si y solo si la estructura tiene un movimiento infinitesimal que asigna ejes instantáneos de rotación distintos a cada par de paneles adyacentes. Además, el modelo permite recuperar todas las interpretaciones espaciales.

Este procedimiento presenta diversas ventajas frente al conocido algoritmo de Sugihara [12]: es más simple, de menor coste computacional, y sólo requiere conocer qué segmentos del dibujo son oclusivos.

Palabras clave: dibujo lineal, condiciones proyectivas, realizabilidad espacial, polisuperficie, estructura articulada de paneles, cinemática instantánea.

1 Introducción

Un *dibujo lineal* es un dibujo hecho a base de *segmentos de recta* y *vértices*, puntos donde dos o más segmentos se unen. Un dibujo lineal es *realizable* si es la proyección (ortogonal o central) de alguna escena tridimensional de poliedros. Se dice que esta escena es una *realización espacial* del dibujo.

En este trabajo abordamos un problema clásico de Robótica e Inteligencia Artificial: decidir primero si un dibujo es realizable y, en caso afirmativo, obtener una parametrización de todas las posibles realizaciones espaciales del mismo. Este problema tiene importantes aplicaciones a interpretación de imágenes y modelado automático 3D de entornos reales.

1.1 Alzado espacial

En general, un dibujo cuyos vertices ocupen posiciones arbitrarias, no suele ser realizable. Por ejemplo, la proyección del tetraedro truncado de la fig. 1, solamente será realizable cuando, extendiendo las tres aristas a , b y c , éstas concurran en un punto común: el vértice del tetraedro (si se completara).

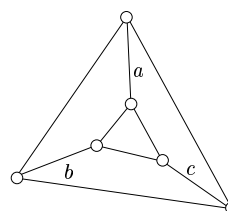


Figura 1: El tetraedro truncado.

Este ejemplo ilustra otro planteamiento equivalente que subraya la dependencia de la altura de algunos vértices con respecto a otros (fig. 2). ¿Es posible *alzar* al espacio los vértices del tetraedro truncado, a lo largo de los rayos imaginarios de proyección, manteniendo coplanares todos los vértices que corresponden a una cara representada en el dibujo?

En este caso, podemos primero fijar libremente la altura de los puntos P , Q y T , manteniéndolos, por ejemplo, en el mismo plano del dibujo. Después, dando una altura arbitraria a R sobre este plano, la altura de S queda fijada por la restricción de coplanaridad en la cara $PQRS$. Finalmente, la altura de U está determinada por la coplanaridad de U, S, Q , y T , pero también por la de U, R, P y T . En general, las dos alturas posibles para U (sobre $USQT$, o sobre $URPT$) no necesariamente coincidirán. Cuando las aristas PR , QS y TU no son concurrentes, el único levantamiento posible es el *trivial*, con todos los vértices coplanares.

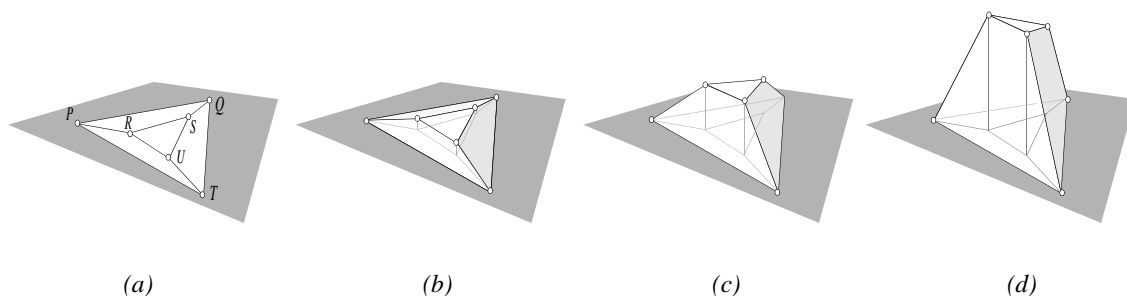


Figura 2: Alzado espacial manteniendo las restricciones de coplanaridad

1.2 Condiciones proyectivas

Como éste, la gran mayoría de dibujos sólo son realizables cuando sus vértices ocupan *posiciones especiales* en el plano. Estas posiciones verifican una serie de *condiciones proyectivas* que, como la de concurrencia en el tetraedro truncado, se cumplen tanto para un objeto poliédrico en el espacio, como en cualquiera de sus proyecciones.

Otros ejemplos avalan el papel fundamental que juegan las condiciones de concurrencia [8]. Esto llevó a los autores a definir un conjunto de condiciones proyectivas necesarias y suficientes para decidir la realizabilidad, basándose únicamente en la aplicación repetida de pruebas de concurrencia de tres rectas deducibles del dibujo [9, 10]: el dibujo es *estrictamente alzable*, con cada par de caras adyacentes descansando sobre planos distintos en el espacio, si, y sólo si, estas condiciones de concurrencia se cumplen.

Este trabajo representa un paso más en esta línea. Esta vez, reduciremos el problema al del cálculo de las velocidades instantáneas en un modelo cinemático de paneles y bisagras, y utilizaremos los resultados que para estos mecanismos ha obtenido el grupo canadiense de Topología Estructural [14, 2]. Aunque se puede demostrar la equivalencia de este test cinemático con las condiciones proyectivas de [9], dejamos esta parte para un artículo futuro.

1.3 Organización

El resto del artículo se estructura como sigue. En la sección 2 hacemos un breve repaso de resultados conseguidos en este área. A continuación (sección 3) introducimos el objeto considerado como interpretación espacial de un dibujo, la polisuperficie. Tras definir las herramientas básicas, el modelo mecánico de paneles asociado a un dibujo y su cinemática instantánea (sección 4), en la sección 5 vemos que un dibujo es realizable si, y solo si, este modelo tiene velocidades angulares no nulas en sus articulaciones. En la sección 6 se estudia un ejemplo concreto y, finalmente, se dan las

conclusiones y líneas de trabajo futuro (sección 7).

2 Perspectiva histórica

La comunidad robótica empieza a estudiar la realizabilidad de dibujos a finales de los años 60, con la aparición de los primeros resultados de Guzmán [4]. En 1971, Huffman [5] y Clowes [1] muestran que sólo existe una cantidad limitada de posibles asignaciones de las etiquetas *cóncava* (+), *convexa* (−) y *oclusiva* (\rightarrow, \leftarrow) a los segmentos incidentes en un determinado vértice. Una vez enumerados todos los posibles tipos de vértices se puede obtener una interpretación del dibujo aplicando técnicas de etiquetado consistente.

En 1975 Waltz refina este esquema y permite tratar dibujos con imperfecciones y sombras, desarrollando su conocido algoritmo de filtrado [13]. Actualmente, se conoce bien la complejidad de este problema [6] y se han desarrollado algoritmos eficientes que trabajan a partir de los puntos de fuga del dibujo [7]. Sin embargo, a pesar de su importancia, estos métodos no garantizan que un dibujo con un etiquetado consistente sea espacialmente realizable ([12], pág. 31), puesto que, en general, la realizabilidad no sólo depende de características puramente topológicas. Para paliar este inconveniente, en 1982 Sugihara [11] propone un test geométrico que garantiza la realizabilidad de un dibujo si, y sólo si, un sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot w = 0 \\ B \cdot w \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

tiene solución, lo cual puede ser comprobado empleando métodos de programación lineal. Aquí el vector w engloba los parámetros desconocidos de los planos soporte de las caras de la eventual realización, y A y B son matrices obtenidas a partir del etiquetado $\{+, -, \rightarrow, \leftarrow\}$, las posiciones de los vértices y las relaciones de incidencia *vértice-cara* del dibujo.

El problema fundamental de este método es que las condiciones $A \cdot w = 0$ y $B \cdot w \geq 0$ son demasiado estrictas. Dado que la realizabilidad sólo es posible para posiciones muy concretas de los vértices,

un dibujo procedente de una escena real raramente las satisfará. Sugihara propone un método para solventar este problema, basado en detectar subdibujos “genéricamente realizables”, es decir, dibujos parciales que són realizables siempre que sus vértices ocupan posiciones genéricas en el plano. No obstante, en [15] Whiteley construye algunos contraejemplos dónde esta técnica no funcionaría.

3 Polisuperficies

Una *polisuperficie* es una superficie continua y orientable, en el espacio 3-dimensional, hecha a base de paneles poligonales planos, unidos entre sí a través de sus aristas. Como vamos a ver, la polisuperficie es un modelo adecuado para interpretar espacialmente una proyección.

En un dibujo hay básicamente dos tipos de segmentos: los *cóncavo-convexos* que proceden de caras que están realmente unidas a lo largo de la arista correspondiente, y los *oclusivos*, que proceden de caras que están separadas, y representan la proyección de una arista vista como contorno desde el punto de proyección.

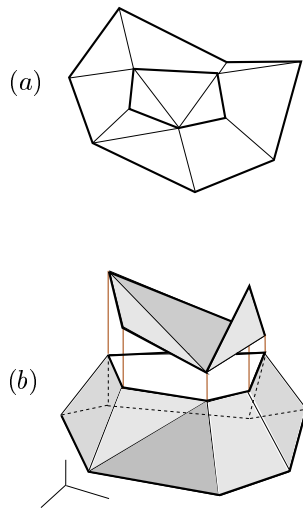


Figura 3: Aristas oclusivas y polisuperficies

Supondremos que en el dibujo a tratar se conoce el tipo de cada segmento. Con esta hipótesis, la interpretación de un dibujo con segmentos oclusivos se puede efectuar tratando separadamente cada región delimitada por un circuito cerrado de segmentos oclusivos como si fuera la proyección de una polisuperficie [8]. Por ejemplo, en la fig. 3a los segmentos oclusivos (gruesos) definen dos conjuntos de caras poligonales interpretables como la proyección de dos polisuperficies (fig. 3b).

4 Cinemática de paneles

Una *estructura de paneles* es un conjunto de paneles $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ planos, rígidos y poligona-

les, unidos entre sí mediante una colección de bisagras $\{\dots, B_{ij}, \dots\}$, donde B_{ij} es la bisagra que une el panel P_i con el P_j , y no hay ningún panel aislado del resto.

En una estructura de paneles en movimiento, denotaremos por ω_{ij} el módulo de la velocidad de rotación instantánea del panel P_i relativa al panel P_j .

Podemos asociar una estructura de paneles a toda proyección plana de una polisuperficie. Asignamos un panel a cada región poligonal de la proyección, y unimos dos paneles con una bisagra si sus regiones son adyacentes a través de un segmento no oclusivo.

4.1 Representación extensorial de velocidades y ejes de rotación

El formalismo del álgebra extensorial de Cayley [14, 3], es especialmente apropiado para describir la cinemática de paneles articulados. Aunque una exposición completa queda fuera de nuestro propósito, introduciremos algunos conceptos básicos para entender el desarrollo posterior.

En este álgebra, se conoce como *n-extensor* a la expresión $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ que liga n puntos en coordenadas homogéneas del espacio proyectivo tridimensional $\mathbb{R}P^3$. El resultado de esta operación se define como el vector de coordenadas de Plücker de la variedad lineal generada por los n puntos, si son independientes, o el *n-extensor* 0 si son dependientes.

Por ejemplo, si $q = (q_1, q_2, q_3, 1)$ y $r = (r_1, r_2, r_3, 1)$ son dos puntos de $\mathbb{R}P^3$, el 2-extensor $q \vee r$ es el vector de coordenadas de Plücker de la recta que definen. En este caso, las coordenadas de Plücker son los seis menores 2×2 de la matriz de coordenadas de estos dos puntos:

$$q \vee r = \text{menores } 2 \times 2 \text{ de } \begin{pmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \\ q_3 & r_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Con estas definiciones, utilizaremos el álgebra para representar la velocidad instantánea de un punto de un sólido rígido, y su eje instantáneo de rotación.

Sean q y r dos puntos de $\mathbb{R}P^3$, alejados una distancia unitaria, situados sobre el eje instantáneo de rotación de un sólido rígido (fig. 4). Si el sólido está rotando con velocidad angular ω , representaremos este eje mediante el 2-extensor $S = \omega \cdot q \vee r$, y diremos que S es el *centro de giro* del sólido.

Dado un sólido rígido en rotación alrededor de su centro de giro $S = \omega \cdot q \vee r$, la velocidad de uno cualquiera de sus puntos, digamos p , se puede representar mediante el 3-extensor $S \vee p = \omega \cdot q \vee r \vee p$.

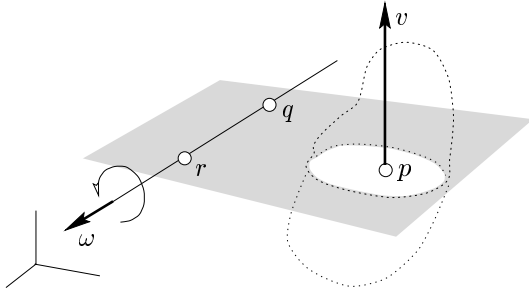


Figura 4: La velocidad de p vista como una rotación alrededor del eje instantáneo $q - r$.

Se demuestra que las cuatro coordenadas del vector $S \vee p$ son de hecho las tres componentes habituales (v_1, v_2, v_3) de la velocidad de p y el producto $v \cdot p$, escogiendo un orden y criterio de signos adecuados [14].

4.2 Dos paneles articulados

Supongamos ahora que nuestra estructura tiene sólo dos paneles, P_i y P_j , articulados a través de una bisagra, y que se encuentran girando uno respecto a otro con velocidad angular relativa ω_{ij} . Sean S_{i0} y S_{j0} los centros de giro de P_i y P_j , respecto a una referencia absoluta “0”, y L_{ij} el 2-extensor formado por las coordenadas de Plücker del eje de la bisagra, calculado a partir de dos puntos separados una distancia unitaria.

En esta situación, la posición de S_{i0} y S_{j0} no puede ser cualquiera: está restringida por la posición L_{ij} de la bisagra y la ley de composición de velocidades. Efectivamente, la velocidad absoluta de un punto p de P_i es igual a la velocidad de p relativa al panel P_j , más la velocidad de arrastre que tendría p si se encontrara rígidamente unido a P_j . Análíticamente,

$$S_{i0} \vee p = \omega_{ij} \cdot L_{ij} \vee p + S_{j0} \vee p \quad (3)$$

puesto que $\omega_{ij} \cdot L_{ij}$ es el centro de giro de P_i con respecto a P_j . Y eliminando p resulta:

$$S_{i0} = \omega_{ij} \cdot L_{ij} + S_{j0} \quad (4)$$

Por tanto, $S_{i0} - S_{j0}$ debe ser un múltiplo de L_{ij} .

4.3 Varios paneles articulados

Análogamente, si tenemos más de dos paneles, la posición de sus centros de giro con respecto a una referencia absoluta viene restringida por tantas ecuaciones del tipo (4) como bisagras tenga la estructura.

Llamaremos *asignación compatible de centros de giro* a una asignación de 2-extensores S_{i0} a cada

panel P_i que verifica $S_{i0} = \omega_{ij} \cdot L_{ij} + S_{j0}$ para toda bisagra L_{ij} de la estructura.

Si la estructura tiene ciclos de paneles, la suma de los términos $L_{ij} \cdot \omega_{ij}$ debe anularse a lo largo de cada uno de ellos, puesto que se trata de una suma de velocidades relativas de cada panel con respecto al anterior y al final del ciclo regresamos al panel inicial.

Un *movimiento instantáneo compatible* es una asignación de escalares ω_{ij} a todas las bisagras de la estructura, de manera que para todo ciclo de caras se cumple $\sum L_{ij} \cdot \omega_{ij} = 0$, donde la suma varía entre todas las bisagras B_{ij} del ciclo.

Teorema 1 *Dada una estructura con un panel P_0 designado como referencia absoluta, existe una correspondencia biunívoca entre una asignación compatible de centros de giro y un movimiento instantáneo compatible.*

Demostración. Dada una asignación compatible de centros de giro, basta tomar los escalares ω_{ij} que satisfacen las ecuaciones $S_{i0} = \omega_{ij} \cdot L_{ij} + S_{j0}$ para definir un movimiento instantáneo. Esto asegura que $\sum L_{ij} \cdot \omega_{ij} = 0$ para todo ciclo de la estructura.

Dado un movimiento instantáneo compatible, entonces $\sum L_{ij} \cdot \omega_{ij} = 0$ para todo ciclo. Para obtener el centro de giro S_{k0} basta fijar un camino que conecte P_0 con P_k y efectuar:

$$S_{k0} = - \sum \omega_{ij} \cdot L_{ij} \quad (5)$$

donde la suma involucra todas las bisagras del camino entre P_0 y P_k . Además, S_{k0} es independiente del camino escogido porque dos caminos distintos formarían un ciclo donde la suma es zero. Con esta definición, se cumplirá $S_{i0} = \omega_{ij} \cdot L_{ij} + S_{j0}$ para toda bisagra L_{ij} de la estructura. \square

5 El test de realizabilidad

Ahora disponemos ya de las herramientas básicas para establecer el test cinemático de realizabilidad.

Teorema 2 *Dada la proyección ortogonal de una polisuperficie sin ninguna cara vertical, la estructura de paneles asociada a esta proyección tiene un movimiento instantáneo compatible que asigna una velocidad angular ω_{ij} no nula a cada par de paneles adyacentes cuyos planos soporte son distintos en el espacio.*

Demostración. Podemos encontrar un movimiento instantáneo de la estructura de paneles de la manera siguiente. A cada vértice de la estructura (fig. 5) le asociamos un vector velocidad que va

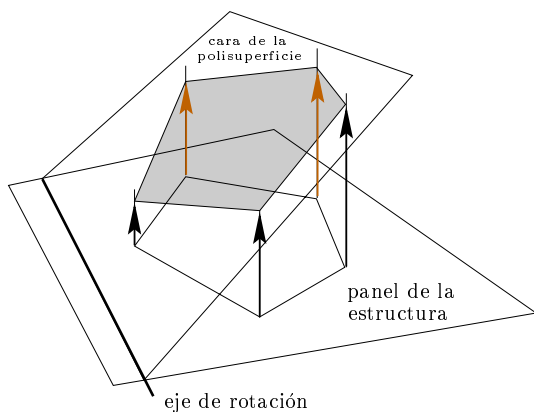


Figura 5: Obtención de un movimiento instantáneo en la proyección de una polisuperficie.

desde ese vértice hasta su vértice correspondiente en la polisuperficie espacial.

Para cada panel, los vectores velocidad de sus vértices son perpendiculares al plano de proyección y los extremos de esos vectores definen puntos coplanares. Por hipótesis, este plano no es vertical, y por tanto todas las velocidades definidas son proporcionales a la distancia de cada vértice a la recta intersección del plano soporte de la cara espacial con el plano del dibujo. Estas velocidades originan una rotación instantánea de cada panel alrededor de esta recta de intersección, recta que constituye el eje instantáneo de rotación del panel en cuestión. Gracias al teorema 1 esta asignación compatible de centros de giro se puede traducir a un movimiento instantáneo compatible de la estructura. \square

El anterior teorema tiene también su recíproco.

Teorema 3 *Dado un dibujo lineal, si es posible encontrar un movimiento instantáneo compatible en su estructura de paneles asociada, cumpliendo $\sum \omega_{ij} L_{ij} = 0$ para todo ciclo de la estructura, entonces el dibujo es la proyección de una polisuperficie con dos caras no coplanares incidentes en cada arista cuyo coeficiente ω_{ij} es no nulo.*

Demostración. Si $\sum \omega_{ij} L_{ij} = 0$ para todo ciclo de la estructura, entonces por el teorema 1 podemos encontrar una asignación compatible de centros de giro. Estos centros estarán en el mismo plano del dibujo, puesto que son combinaciones lineales de los 2-extensores de las bisagras. Por tanto, todo vértice de la estructura se mueve con una velocidad perpendicular a este plano. Para cada panel tomamos ahora los extremos de estos vectores velocidad como los vértices de la polisuperficie espacial. Tal como se han definido, estos vértices serán coplanares. Las caras incidentes a una arista de la polisuperficie serán no coplanares si, y solo si, sus dos paneles tienen distintos

centros de giro o, equivalentemente, si, y solo si, la bisagra correspondiente tiene un coeficiente ω_{ij} no nulo. \square

Ahora, recopilando todas las ecuaciones vectoriales $\sum \omega_{ij} L_{ij} = 0$ correspondientes a los ciclos independientes de la estructura de paneles, podemos expresar el sistema de ecuaciones matricialmente:

$$R \cdot \omega = 0 \quad (6)$$

La matriz R , que denominaremos *matriz de rigidez*, tiene tantas filas como ciclos independientes tiene la estructura, y tantas columnas como bisagras. Con esta definición y los dos teoremas anteriores podemos finalmente dar las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan un dibujo realizable.

Corolario 1 *La proyección de una polisuperficie es realizable si y solo si el núcleo de la aplicación lineal definida por R es un subespacio vectorial de dimensión no nula que contiene algún vector ω con todas sus componentes distintas de cero.*

Demostración. Si la proyección es realizable, existe una realización con todo par de caras adyacentes situadas sobre planos distintos. Por el teorema 2 esta realización define un movimiento instantáneo compatible que asigna coeficientes ω_{ij} no nulos a todas las bisagras de la estructura asociada. Estas asignaciones forman un vector no nulo de $\text{Ker}(R)$.

Si $\omega \in \text{Ker}(R)$ tiene todas sus componentes ω_{ij} no nulas, por el teorema 3 todo par de caras adyacentes descansarán en planos distintos de una realización espacial. \square

Corolario 2 *Cada vector de $\text{Ker}(R)$ da lugar a una realización distinta, y podemos generar todas las realizaciones recorriendo este núcleo.*

Finalmente, la forma de las aristas no oclusivas depende del signo de su correspondiente coeficiente ω_{ij} .

Corolario 3 *Los signos de las velocidades relativas ω_{ij} indican la forma del alzado espacial. La arista correspondiente es cóncava si $\omega_{ij} > 0$ y convexa si $\omega_{ij} < 0$.*

6 El tetraedro truncado

Para ilustrar la aplicación de este test, analizaremos la proyección del tetraedro truncado de la fig. 6. Escogemos las coordenadas

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 0, 1) & p_2 &= (6, 0, 1) & p_3 &= (0, 4, 1) \\ p_4 &= (1, 3, 1) & p_5 &= (1, 1, 1) & p_6 &= (4, 1, 1) \end{aligned}$$

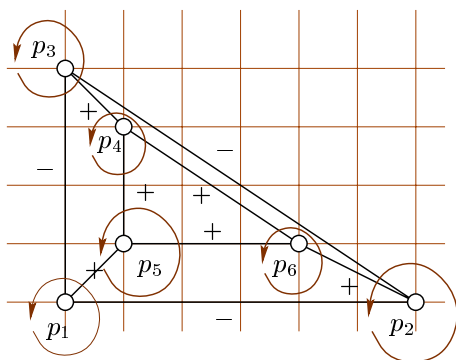


Figura 6: Un tetraedro truncado correcto

Si consideramos el fondo como un panel más, y los ciclos independientes indicados, la matriz de rigidez tiene un núcleo de dimensión 1 cuya base se puede calcular utilizando la librería *linalg* de MAPLE V. Un vector de esta base es

$$(\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{26}, \omega_{34}, \omega_{45}, \omega_{46}, \omega_{56}) = \left(1, \frac{3}{2}, -6, 3, -12, -18, -3, -6, -2\right)$$

los signos del cual dan lugar a los etiquetados cóncavos (-) y convexos (+) de la fig. 6.

Si el panel de fondo se considerara despegado del resto, aceptando que las aristas del perímetro exterior son oclusivas, se puede comprobar que el núcleo tiene dimensión cuatro, correspondiendo a las alturas de los cuatro puntos que hay que fijar para obtener una realización espacial del tetraedro.

7 Conclusiones y trabajo futuro

Hemos demostrado que un dibujo lineal con segmentos oclusivos marcados es espacialmente realizable si una estructura de paneles asociada tiene un movimiento instantáneo que asigna velocidades de rotación no nulas a los segmentos no oclusivos. Este modelo mecánico permite encontrar todas las realizaciones espaciales posibles, de forma parametrizada.

Esta aproximación tiene claras ventajas con respecto al conocido algoritmo de Sugihara [12].

- Al reducir el problema al estudio de un sistema de ecuaciones lineal, se obtiene un test más simple y de menor complejidad que el método de programación lineal propuesto en [12].
- Tampoco, es necesario partir de un dibujo totalmente etiquetado. Sabiendo únicamente qué segmentos son oclusivos, todos los etiquetados consistentes posibles $\{+, -, \rightarrow, \leftarrow\}$ no son más que un producto adicional del método de reconstrucción, en lugar de un dato requerido.

Nuestro próximo paso consistirá en añadir el tratamiento de incertidumbre en la posición de los vértices. Efectivamente, debido al inevitable ruido introducido durante el proceso de medición, las proyecciones extraídas de imágenes reales raramente serán correctas, aunque sí cercanas a la realizabilidad. Por tanto, es conveniente disponer de un método que corrija estas proyecciones para obtener sus interpretaciones espaciales. La descomposición en valores singulares de la matriz de rigidez R da mucha información de cuán cerca estamos de encontrar un núcleo de dimensión no nula, y parece una vía prometedora para conseguir este objetivo.

Referencias

- [1] M. Clowes. On seeing things. *Artificial Intelligence*, 2(1):79–116, 1971.
- [2] H. Crapo. Structural topology, or the fine art of rediscovery. *The Mathematical Intelligencer*, 19(4):27–35, 1997.
- [3] P. Doubilet, G.-C. Rota, and J. Stein. On the foundations of combinatorial theory: IX. combinatorial methods in invariant theory. *Studies in Mathematics*, 53(3), Sept. 1974.
- [4] A. Guzman. Computer recognition of three-dimensional objects in a visual scene. Technical Report MAC-TR-59, Massachusetts Institute of Technology, 1968.
- [5] D. Huffman. Impossible objects as nonsense sentences. *Machine Intelligence*, 6:295–323, 1971.
- [6] L. M. Kirousis and C. H. Papadimitriou. The complexity of recognizing polyhedral scenes. *Computer and System Sciences*, 37:14–38, 1988.
- [7] P. Parodi and G. Piccioli. 3d shape reconstruction by using vanishing points. *PAMI*, 18(2):211–217, February 1996.
- [8] L. Ros and F. Thomas. Novel results in scene reconstruction from plane pictures. Preprint IRIDT-9712. Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, December 1997.
- [9] L. Ros and F. Thomas. Analysing spatial realizability of line drawings through edge-concurrence tests. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, May 1998.
- [10] L. Ros and F. Thomas. Applying delta/star reductions for checking the spatial realizability of line drawings. In *14th European Workshop on Computational Geometry*, Barcelona, March 1998.
- [11] K. Sugihara. Mathematical structures of line drawings of polyhedrons. Towards man-machine communication by means of line drawings. In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, volume PAMI-4, 1982.
- [12] K. Sugihara. *Machine Interpretation of Line Drawings*. The MIT Press, 1986.
- [13] D. Waltz. Understanding line drawings of scenes with shadows. In P. H. Winston, editor, *The Psychology of Computer Vision*, pages 19–91. Mc. Graw Hill, 1975.
- [14] W. Whiteley. Motions and stresses of projected polyhedra. *Structural Topology*, 7:13–38, 1982.
- [15] W. Whiteley. From a line drawing to a polyhedron. *Journal of Mathematical Psychology*, 31:441–448, 1987.